

**ESTIMATION DE L'INCERTITUDE DU MONTANT
DE PROVISIONS POUR SINISTRE A PAYER :
MODELE DE MACK «CAS DE LA SAA»**

Meriem **BELKACEM-NACER***

Abdelouahab **LATRECHE****

Résumé

Dans le cadre de l'application de la nouvelle réforme réglementaire de l'assurance «solvabilité II», les organismes assureurs ne peuvent plus se contenter des estimations déterministes des montants de provisions inscrits au passif. Il est aujourd'hui en effet indispensable d'évaluer l'incertitude de ces estimations et ainsi de quantifier le risque lié à celles-ci. Ces nouvelles exigences impliquent la mise en place de modèles de provisionnement stochastiques.

L'objectif de cet article est de mettre en avant les modèles d'évaluation du montant de provisions pour sinistre à payer, et d'expliquer l'efficacité des modèles stochastiques, et voir dans quelle mesure l'application de ces méthodes par les « compagnies algériennes d'assurance» pourrait apporter plus de précision sur l'estimation de ses provisions.

Mots-clés : Bootstrap, Chain-Ladder, Mack, Modèles linéaires généralisés (GLM), Provisions sinistres à payer (PSAP), « Solvabilité II », Triangle de liquidation.

Code JEL: G22.

* Attachée de recherche au CREAD à la division : « Macro Economie et Intégration Economique ».

** Professeur à L'ENSSEA.

Introduction

L'environnement dans lequel évolue une compagnie d'assurance doit être caractérisé par les termes « risque » et « incertitude ». C'est en tenant compte de cette distinction fondamentale entre ces deux termes qu'il faut apprécier l'activité d'une compagnie d'assurance.

Lorsqu'il s'agit d'apprécier le montant et le moment du versement des indemnités aux assurés, l'activité d'assurance est à la fois risquée et incertaine.

Cet environnement aléatoire décrit le caractère de l'inversion du cycle économique propre à l'activité d'assurance qui consiste dans le paiement d'une prime par les assurés dans un premier temps, puis le cas échéant, donne lieu au paiement d'une indemnité ultérieurement.

Ceci justifie l'intérêt des provisions que constituent les compagnies d'assurance pour faire face à leurs engagements éventuels.

En assurance non-vie, la plus importante de ces provisions est la provision pour sinistre à payer qui correspond à « la valeur estimative des dépenses nécessaires au règlement de l'ensemble des sinistres survenus non encore payés à la date de l'inventaire.¹».

L'une des principales sources d'incertitude pour une compagnie d'assurance non-vie réside en effet dans l'estimation de ses engagements envers ses assurés et en particulier de ses provisions pour sinistre à payer. Cette incertitude provient essentiellement du fait que le montant des paiements futurs relatifs aux sinistres survenus n'est pas connu à la date d'évaluation des provisions pour sinistres.

Une mauvaise estimation de ces provisions peut avoir de très lourdes conséquences pour la compagnie, allant d'une simple perte à l'insolvabilité. Car un niveau de provision trop élevé génère une baisse de résultat pour la compagnie. A ce titre, de nombreux contrôles sont régulièrement effectués pour réguler cet enjeu fiscal.

Le coût des sinistres a un impact sur la rentabilité future de la compagnie à travers son niveau de tarification qui reflète son anticipation des charges futures sur l'analyse des charges actuelles.

¹Jacob Nicolas, 1980.

Avec la nouvelle réforme réglementaire de l'assurance, « Solvabilité II », et ses nouvelles normes quantitatives de calcul des provisions techniques, les compagnies d'assurance s'intéressent de plus en plus à une évaluation précise de ces provisions, et notamment de la provision pour sinistres à payer (PSAP), ainsi que de l'erreur d'estimation.

Car l'objectif poursuivi par cette nouvelle réglementation « Solvabilité II », est d'encourager les organismes d'assurance à mieux connaître et évaluer leurs risques notamment en adaptant des exigences réglementaires aux risques que les entreprises encourent dans leur activité, et vise à harmoniser les règles de calcul des provisions techniques en y intégrant de manière *quantitative* et explicite de la prudence².

Le principe directeur est de mesurer le risque et de choisir le montant de provisions en référence à un niveau de risque prédéterminé. Ceci nécessite d'être capable, au préalable, de modéliser la charge ultime de sinistres et définir ce qu'est le risque.

Dans le référentiel « solvabilité II », le niveau des provisions est fixé en référence à une mesure de risque. Par exemple, on choisira la provision qui permet de payer l'intégralité des sinistres dans 75% des cas (Value- at Risk à 75%).

C'est pourquoi les organismes assureurs, qui auparavant n'avaient pour objectif que d'obtenir une simple estimation de la PSAP, accordent maintenant plus d'importance à quantifier précisément les erreurs d'estimation afin d'utiliser le modèle qui s'adaptera le mieux à leurs données.

Cet article a pour objectif :

- ✓ La détermination de l'efficacité des méthodes stochastiques de provisionnement en assurance non vie;
- ✓ voir dans quelle mesure l'application de ces méthodes par nos compagnies d'assurance pourrait octroyer plus de précision sur l'estimation de ses provisions

La présente étude est inspirée principalement, des travaux de Christian Partrat, Jean-Marie Nessi, Eric Lecoœur, Ecaterina Nisipasu et Olivier Reiz (2007) «Provisionnement technique en Assurance non-vie Perspectives actuarielles modernes», et de Denuit, M et A. Charpentier (2005): « Mathématiques de l'assurance non vie » Tome 2 : tarification et provisionnement, et essentiellement les travaux de Mack Thomas., 1993.Measuring the variability of chain ladder reserve estimates. Meeting of the Casualty Actuarial Society.

Ainsi, plusieurs études couvrant ce domaine sont venues soutenir et confirmer ces travaux.

1. Définition et utilité des provisions techniques en assurance non-vie

L'activité d'assurance non vie est par sa nature même sujette à des fluctuations qui affectent les prix, les conditions, mais aussi, avec un décalage dans le temps, la rentabilité des affaires souscrites.

On distingue deux catégories d'assurances :

Les assurances de personnes (assurance vie) : l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente définis par le contrat, si se réalisent des risques touchant à la personne même de l'assuré³, ce type d'assurance est subdivisé en :

- ✓ assurance individuelle, accident de travail et maladies.
- ✓ Assurance sur la vie. (décès, vie retraite, épargne.....).

Quant à l'assurance dommage (non-vie) elle a comme but d'indemniser l'assuré contre un sinistre affectant son patrimoine. Ce type d'assurance est subdivisé en :

Assurance de chose : l'assureur s'engage à indemniser l'assuré des dommages subis par ses biens, cette indemnisation correspond rarement à l'intégralité du préjudice subi par l'assuré, elle est en général effectuée sous déduction d'une franchise et dans la limite d'un plafond de garantie inférieur à la valeur total des biens assurés.⁴

³ Alain Tosetti , 2002.

⁴ Alain Tosetti ibid.

Assurance de responsabilité : l'assureur s'engage à indemniser, à la place de l'assuré, les tierces victimes de dommages -matériels ou corporels- dont l'assuré est responsable⁵.

L'assurance dommage (non-vie) se caractérise par des particularités essentielles :

- L'existence des dispositifs contractuels limitant la prise en charge du risque par l'assureur, ainsi le règlement s'effectue fait par déduction d'une franchise et pour l'assurance des choses, dans les limites d'une garantie.
- Le fait que bien souvent le sinistre survenu et déclaré n'est pas connu précisément, et il y a un délai de plusieurs années entre survenance d'un sinistre et son règlement effectif.

L'inversion du cycle production, est à l'origine des provisions. En effet, cette particularité implique qu'une entreprise d'assurance devra constituer un capital au passif afin d'honorer ses engagements envers ses assurés et bénéficiaires de contrat.

2.1 Définitions

Il n'existe pas de définition précise des provisions techniques en matière d'assurance⁶. Les provisions sont rattachées généralement au poste du passif du bilan, que les entreprises d'assurance doivent constituer selon les règles comptables et dont le montant doit être suffisant pour le règlement intégral des engagements de l'assureur à l'égard des assurés et bénéficiaires des contrats.

Les provisions trouvent leur ancrage juridique dans l'article 224 de l'ordonnance 95-07 du 25 janvier 1995 relative aux assurances (modifiée et complétée) par la loi 06-04 du 20 février 2006 et dans le décret exécutif 95-342 du 30 octobre 1995 relatif aux engagements réglementés.

D'un point de vu comptable, la provision est devenue la « somme affectée par l'entreprise à la couverture d'une charge ou d'une perte virtuelle, future ou éventuelle ».

⁵ Alain Tosetti *ibid.*

⁶ Khalid Mountassir, 2000.

Parmi toutes les définitions présentées ci-haut on peut retenir qu'une provision est définie comme : *un passif certain dont le montant ou l'échéance est incertaine*⁷.

Il existe différentes catégories des provisions techniques selon la nature des activités de l'entreprise. Les principales sont les provisions pour sinistre à payer (PSAP).

1.1.1 Provisionnement sous «solvabilité II»

Solvabilité II va introduire un changement dans la détermination des provisions techniques. Ils correspondront donc à la somme d'un Best Estimate⁸ et d'une marge de risque⁹. Cette dernière est considérée nulle dans la suite.

2. Présentation des méthodes d'estimation des provisions sinistre a payer

Les méthodes traditionnellement employées dans le calcul de la provision pour sinistres à payer sont des méthodes dites statistiques qui reposent principalement sur les données historiques de la sinistralité. Elles sont de deux catégories :

- ✓ Les méthodes déterministes ;
- ✓ Les méthodes stochastiques.

Elles sont toutes basées sur la sinistralité passée de la branche étudiée, pour cela les données sont utilisées sous la forme d'un triangle appelé « triangle de liquidation »¹⁰.

Ces différentes méthodes ont pour objet de cerner au mieux les engagements futurs probables de l'assureur. La pratique conduit à

⁷ Patrick Pinteaux, 2007.

⁸ Est la valeur actuelle probable des flux futurs de trésorerie, c'est-à-dire la moyenne des paiements futurs actualisés.

⁹ Elle est déterminée comme étant une composante des provisions techniques, destinée à garantir que leur valeur est équivalente au montant dont des entreprises d'assurance auraient besoin pour reprendre et honorer leurs engagements.

¹⁰ Les triangles de liquidation, encore appelés triangles de « Run Off » reflètent la dynamique des sinistres. Ils permettent de suivre la vie d'un sinistre en analysant par exemple, année par année le niveau des règlements, qui ont été versés ou encore le niveau de la charge. Les sinistres sont rapportés à des périodes : année, semestre, trimestre, mois.

calculer les engagements en appliquant plusieurs de ces méthodes, de façon à déterminer un montant de provisions aussi fiable que possible.

3.1 Format de données et notations

Les quantités analysées sont des paiements (règlements) de sinistres survenus. Les sinistres sont rapportés à des périodes annuelles. L'année récurrente n se déroule du 01/01/ n au 31/12/ n .

Le 31/12 étant la date d'inventaire ou date de fin d'exercice.

En considérant une branche d'activité dont les sinistres se déroulent sur $n + 1$ années, il est noté¹¹:

i : l'indice de l'année d'origine de survenance où $i \in [0, \dots, n]$.

j : l'indice de l'année de développement où $j \in [0, \dots, n - i]$.

$Y_{i,j}$: Correspond aux paiements des sinistres (incrément) ¹² survenus l'année i et réglés l'année comptable .

$C_{i,j}$: Correspond aux paiements agrèges ou (cumulés) des sinistres survenus l'année i , et au délai de développement j .

$\hat{C}_{i,n}$: Le paiement cumulé final pour l'année de survenance i après $n + 1$ années de développement.

3.1.1 Technique de la triangulation

Le but des méthodes de provisionnement, par des techniques de triangulation, est de modéliser la manière avec laquelle le cumul des sinistres évolue en fonction du temps, ainsi, de résumer la sinistralité passée pour estimer la sinistralité future par exercice de survenance¹³.

La technique de la triangulation étant la base de calcul des provisions techniques, au 31/12/ les paiements de sinistres réglés antérieurement à cette date sont classiquement mis sous forme d'un triangle.

¹¹ Denuit Michel, Arthur Charpentier, 2005.

¹² C'est-à-dire non cumulés

¹³ Gillet Antonin, Serra Benjamin.

Tableau N°1 : **Illustration d'un triangle de liquidation**

Développement « j »					
Origine « i »	0	1	...	n - 1	n
0	$Y_{0,0}$	$Y_{0,1}$...	$Y_{0,n-1}$	$Y_{0,n}$
1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$...	$Y_{1,n-1}$	$\hat{Y}_{1,n}$
...
n - 1	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$...	$\hat{Y}_{n-1,n-1}$	$\hat{Y}_{n-1,n}$
n	$Y_{n,0}$	$\hat{Y}_{n,1}$...	$\hat{Y}_{n,n-1}$	$\hat{Y}_{n,n}$

Source : *Elaboré par nos soins*

Chaque cellule du triangle correspond à des paiements (non cumulés) effectués dans l'année civile $i+j < n$.

Où :

$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j Y_{i,k}$: Charge cumulée des sinistres connue à la période de développement j , pour une année d'origine i .

Le calcul des provisions consiste donc à prévoir le montant final des sinistres, afin de provisionner les paiements non encore effectués. Pratiquement, il s'agit donc de prédire la partie inférieure du triangle, contenant des paiements futurs estimés (\hat{C}_{in} ou \hat{Y}_{in})¹⁴.

3.2 Méthodes de provisionnement déterministes

Ces méthodes très utilisées par les services comptables et techniques des compagnies d'assurance, ont le mérite d'être souples et de renvoyer des résultats facilement interprétables. Elles permettent facilement d'apprécier le niveau « Best Estimate » (niveau des provisions sans marge de risque).

¹⁴Prédire les montants (\hat{C}_{in} ou \hat{Y}_{in})selon le modèle d'estimation des provisions choisi

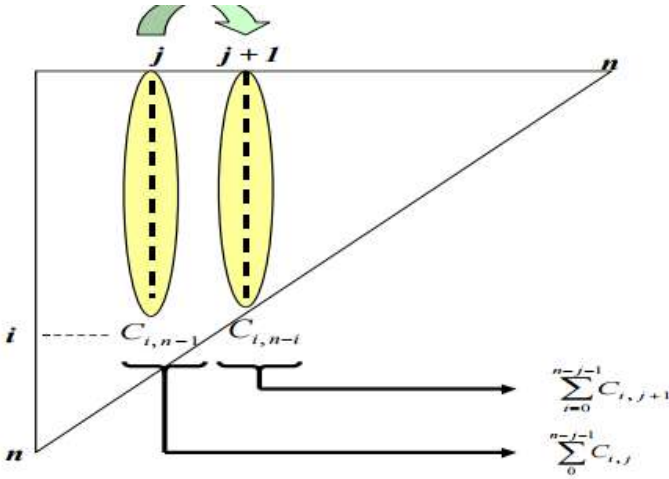
3.2.1 Le modèle « Chain-Ladder »

En assurance non-vie, la méthode de référence en matière de provisionnement est la méthode de « Chain Ladder ». Elle est fondée sur l'utilisation des facteurs de développement, encore appelés coefficients de passage, ces derniers représentent le taux de croissance des montants cumulés d'une année à la suivante, donnant donc des montants totaux payés dans le futur.

Elle consiste à supposer que les $(C_{ij})_{j=0, \dots, n-1}$ sont liés par un modèle linéaire de la forme¹⁵ :

$$\hat{C}_{i,j+1} = f_j C_{ij} \text{ pour tout } i = 0, \dots, n - j - 1$$

Figure N°1 : Schématisation de la méthode Chain-Ladder



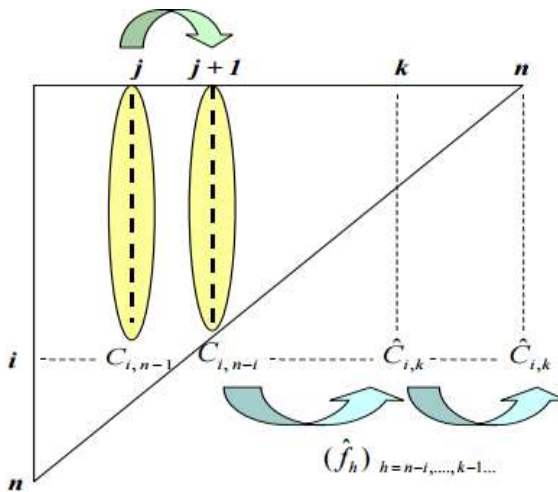
Source : guide rédigé par les actuaires des compagnies algériennes, dans le cadre du programme d'appui à la modernisation du secteur financier algérien

¹⁵ Compte-rendu de mission d'assistance technique (Lot 2) Méthodes de calcul des engagements techniques détail des principales méthode a destination des actuaires des compagnies algérienne. Avril 2005

Les coefficients (facteurs) f_j appelés Link-ratios¹⁶, peuvent être estimés, à l'aide des observations, par le rapport des totaux relatifs aux éléments communs de deux colonnes successives, c'est-à-dire par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j+1} C_{i,j}} \quad 0 \leq j \leq n-1$$

Figure N°2 : **Illustration du calcul des facteurs de développement de Chain-Ladder**



Source : Guide rédigé par les actuaires des compagnies algériennes, dans le cadre du programme d'appui à la modernisation du secteur financier algérien

A l'aide de ces facteurs, nous obtenons donc, une prévision des montants cumulés futurs, comme proposé dans l'équation suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-1} f_{n-i} \cdots f_{j-1} = C_{i,n-1} \prod_{h=n-i}^{j-1} f_h$$

Une estimation de la provision nécessaire pour les sinistres de l'année i est donc :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

¹⁶ Link ratio : appelé aussi facteur de développement

$n - i$ étant l'année courante.

Le modèle « Chain-Ladder » se base sur deux hypothèses essentielles¹⁷ :

$$(H1): \{C_{i,1} \dots C_{i,n}\}, \{C_{j,1} \dots C_{j,n}\} i \neq j.$$

Les années de survenance sont indépendantes entre elles. Cette hypothèse signifie que les sinistres survenus au cours d'une année de survenance donnée, n'ont aucune influence sur les sinistres pouvant survenir l'année suivante. Cette hypothèse est en général vérifiée dans la plupart des domaines de l'assurance.

$$(H2): E\{C_{i,j+1} | C_{i,1} \dots C_{i,k}\} = f_j C_{i,j}.$$

Les années de développement, sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs. Cette hypothèse signifie que la seule explication de l'évolution du montant des sinistres au cours des années de développement est la durée de ce développement.

3.2.2 Critique des méthodes déterministes

Pour conclure, les méthodes déterministes permettant d'estimer les provisions pour sinistres, sont relativement simples d'utilisation, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Toutefois dans un contexte de plus en plus probant de prise en compte du coût du risque, elles ne permettent pas de mettre en avant la volatilité de la sinistralité. Néanmoins elles permettent facilement d'apprécier le niveau « Best Estimate » (niveau des provisions sans marge de risque).

On peut dire que la méthode « Chain-Ladder » renseigne uniquement sur le montant de provisions à prévoir, et sa précision est dépendante d'une très forte stabilité du processus de gestion des sinistres et de la nature des contrats. Une fusion, par exemple bouscule rapidement la fiabilité de ce processus.

¹⁷Denuit M et Arthur. C, 2005.

3.3 Méthodes de provisionnement stochastiques

Les méthodes stochastiques permettent de modéliser les provisions de sinistres de manière probabiliste tout en gardant de la cohérence par rapport à l'analyse déterministe réalisée par la méthode « Chain-Ladder ». Elles considèrent que les éléments constitutifs du triangle sont des variables aléatoires réelles.

Différentes méthodes d'estimation stochastique des PSAP sont proposées dans la littérature¹⁸, les deux méthodes stochastiques les plus utilisées sont :

- Une méthode de type paramétrique, la méthode de Mack qui permet de déterminer les paramètres d'une loi de probabilité choisie par l'utilisateur (Normale, Log Normale,...).
- Une méthode de type non-paramétrique, le « Bootstrap » basée sur des simulations de type Monte-Carlo et permet d'obtenir directement une distribution des provisions.

✓ Intérêt

L'idée est de pouvoir quantifier la variabilité des provisions estimées, notamment par la construction d'intervalle de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant de provisions.

3.3.1 Le modèle de Mack

Le modèle stochastique de Mack est relatif à la méthode de « Chain Ladder » et est conditionnel et s'applique sur le triangle des montants cumulés¹⁹. Il permet de dégager une estimation de la volatilité de l'estimateur des provisions techniques, et détermine les espérances connaissant les réalisations du triangle supérieur. (Il s'agit d'un modèle non-paramétrique, au-sens ou aucune hypothèse de distribution n'est adoptée sur les composantes du triangle)²⁰.

Ce modèle non paramétrique ajoute une troisième hypothèse reposant sur la variabilité des provisions²¹ :

¹⁸ pour plus de détail voir Partrat 2005.

¹⁹ Mack Thomas, 1993.

²⁰ Arnaud Lacoume 2008.

²¹ Mack Thomas, 1994.

(H3) : La variance conditionnelle de $C_{i,j}$ est donnée par :

$$\text{Var}(C_{i,j+1}/C_{i,1} \dots C_{i,j}) = C_{i,j} \sigma_j^2 \text{ pour } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Il fournit exactement les mêmes provisions que la méthode originale de « Chain-Ladder ».

i) mesures de risques sur l'incertitude d'estimation des provisions.

En matière de provisionnement, pour quantifier l'incertitude sur l'estimation des provisions, nous faisons des projections sur les années futures ; et l'incertitude associée à ces prédictions s'appelle « means squared error of prediction » (erreur quadratique moyenne de prédiction), notée *msep*. Par exemple, si nous nous intéressons à l'incertitude portant sur l'estimateur \widehat{R} du montant total de provisions, nous étudions la quantité :

$$msep(\widehat{R}) = E\left[\left(R - \widehat{R}\right)^2\right]$$

Théorème :(Mack Thomas, 1993)

Sous les hypothèses (H1), (H2), et (H3), *msep* (\widehat{R}_i) peut être estimée par :

$$\widehat{msep}(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2} \left[\frac{1}{\widehat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right]$$

Avec $\widehat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$ et $\widehat{C}_{i,k}$ les valeurs estimées du triangle inférieur.

Où :

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

Et

$$\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}, \widehat{\sigma}_{n-3}^2, \widehat{\sigma}_{n-2}^2 \right) ;$$

La *msep* la variance de la provision qui mesure la fluctuation de la réserve qui peut être causée par l'ensemble des types d'erreur d'assurance.

La *msep* est la somme d'une erreur d'estimation et d'une erreur classique de modèle (ou erreur de processus). Les erreurs *msep* (\widehat{R}_i) étant toute influencées par les mêmes

coefficients \widehat{f}_j . L'erreur de prédiction (*msep*) agrégée est alors définie par :

Corollaire

Avec les notions du théorème, un estimateur de *msep* agrégé sur les années d'accident, et relatif à l'ensemble des provisions est donné par²² :

$$\widehat{msep}(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ \left(\widehat{msep}(\widehat{R}_i) \right) + \widehat{C}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \widehat{C}_{j,n} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\sigma_k^2}{\widehat{f}_k^2}}{\sum_{j=1}^{n-j} C_{j,k}} \right\}$$

Cet indicateur donne l'erreur commise sur le calcul de la provision totale estimée. Le but est donc de minimiser cette erreur. Plus cet indicateur est élevé, moins le modèle est adéquat pour évaluer les provisions du triangle.

3.3.2 Présentation et principe du Bootstrap

Le Bootstrap est une méthode de simulation présentée par *England et Verrall*²³, basée sur le ré-échantillonnage des données avec un tirage aléatoire des résidus issus de l'application du modèle statistique sous-jacent. Son efficacité a été prouvée dans de nombreux domaines et s'avère être un outil puissant en assurance pour estimer la variabilité des prédictions des estimateurs des paiements futurs ou la distribution empirique des provisions. Il peut être associé à différentes méthodes d'estimation stochastique des provisions, en particulier les modèles linéaires généralisés²⁴.

- i) Les modèles linéaires généralisés

Les méthodes GLM (Generalized linear models) sont des méthodes stochastiques pures puisque chaque élément du triangle de liquidation

²² Arnaud Lacoume 2008.

²³ England P.D & Verrall R.J 2002.

²⁴ Pour plus de détail sur la procédure Bootstrap appliquée au provisionnement voir England, P. et R. Verrall. 1999.

est considéré comme une variable aléatoire, qui est décrite par une loi de probabilité. L'objectif de ces méthodes est de modéliser les règlements par un modèle poisson sur-dispersé ou par un autre modèle tel que Gamma, Log Normal...etc. ; dont les variables explicatives sont les facteurs lignes et colonnes.

3. Modèles, résultats, analyse

Pour information, l'étude a été réalisée sur la base des comptes arrêtés au 31/12/2009.

Les données dont nous disposons portent sur les triangles de paiements des sinistres (brut de recours) de la responsabilité civile afférents aux dommages matériels de la branche automobile constitués à partir des bilans de la SAA observés de 2004 à 2009.

L'ensemble des résultats présentés a été obtenu à l'aide d'outils développés sous le logiciel R.

Le tableau ci-dessous représente le triangle des paiements (règlements) des garanties accordés par la compagnie :

Tableau N°2 : **Triangle des paiements (règlements) non cumulés**

	1	2	3	4	5	6
2004	892.306	347.552	688.165	466.552	295.073	44.967
2005	606.002	917.541	710.960	415.773	51.210	
2006	1023.326	998.426	632.137	97.467		
2007	877.069	958.907	186.845			
2008	953.403	505.920				

Source : Société Algérienne des Assurances (SAA)

($Y_{i,j}$) en 10^2 DA

Une ligne de ce triangle, représente les montants versés au cours d'une année de survenance ; ainsi, la première ligne représente les sommes successivement versées par l'assurance au titre des sinistres survenus en 2004.

A titre d'exemple, la valeur **688. 165 (10^2 DA)** sur la première ligne indique qu'en 2006, le montant des indemnités versé au titre des sinistres survenus en 2004 est de **688. 165 (10^2 DA)**.

Nous remarquons aussi, sur ce triangle, que les montants de règlements (paiements) des sinistres vont en baisse, en se rapprochant des dernières années de développement, ce qui signifie que la compagnie a indemnisé la plus grande partie de ces sinistres dès les premières années après la date de déclaration du sinistre.

3.1 Résultats des méthodes déterministes: Provisions Chain-Ladder

Il convient maintenant de déterminer la charge ultime qui permet à la compagnie d'assurance de mesurer son risque tout au long du développement des sinistres. En supposant n la période ultime, c'est-à-dire la période à laquelle le sinistre sera intégralement réglé, quelque en soit la branche, l'idée est alors d'estimer grâce aux données connues du triangle supérieur gauche, les montants ultimes des sinistres pour chaque année d'origine, c'est-à-dire la dernière colonne, ainsi, que la provision qui est égale à la Charge ultime moins la somme des montants réels de la dernière colonne (*c'est-à-dire les montants déjà payés*) nécessaire à constituer pour faire face aux règlements de sinistres inattendus.

Tableau N°3 : **Détermination des charges futurs (ultimes) et des provisions (PSAP)**

	Derniers règlements	Charges ultimes	Provisions
2004	2734 .615	2734. 615	0
2005	2701. 486	2746 .65	45. 16
2006	2751 . 356	2989.37	238. 01
2007	2022 .821	2513.72	490. 90
2008	1459 .323	2421.00	961. 67
2009	927.146	2855.79	1928. 65
Total	12 596. 747	16 261. 145	3 664.4

Source : *Elaboré à partir du rectangle des paiements*²⁵

On remarque que la provision de la première année de survenance (2004) est nulle car par hypothèse que, la première ligne du triangle est close, c'est-à-dire sans de sinistres ouverts. Plus exactement, nous

²⁵ Cf annexe 1

supposons qu'il y a plus de déclaration tardive au-delà de 6 ans après l'année de survenance de sinistre. Car plus l'année de survenance est récente, plus le nombre d'années nécessaires pour l'extinction et l'indemnisation de tous les sinistres survenus cette dernière année, est important.

Le Best Estimate de la provision «Chain Ladder » constitué en fin 2009 pour la responsabilité civile « Dommages Matériels » est donc **3664.4 (10² DA)**.

On peut dire que, la méthode déterministe « Chain-Ladder » montre rapidement ses limites : les prévisions divergent pour les années de développement les plus récentes ; et absence de référence au risque réellement supporté par la compagnie lors de l'estimation de ces provisions. C'est pour cette raison, que cette méthode sera révisée par la suite dans un cadre stochastique.

4.2 Résultats des méthodes stochastiques : Le modèle récursif de Mack

Le calcul des différents paramètres de risques, obtenus par le modèle Mack sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau N° 4 : **Estimation des provisions et paramètres de risque du modèle Mack**

	\hat{R}	$\widehat{mse\hat{p}}(\hat{R}_i)$	$se(R_i)en\%R_i$
2004	0	-	-
2005	45.16	30276	385.296%
2006	238.01	9424	128.98%
2007	490.90	156025	80.46%
2008	961.67	320356	58.85%
2009	1 928.65	874225	48.47%
Total	3664.4	2167831.96	40.18%

Source : *Etabli à partir du triangle des paiements cumulé*²⁶

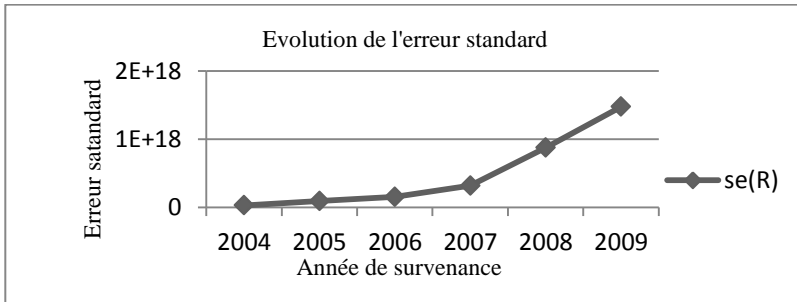
La première remarque qui se dégage à la lecture de ce tableau est la forte variabilité du montant des provisions sur l'ensemble des années,

²⁶ Cf Annexe 2

mesurée par l'erreur quadratique moyenne de prédiction $\widehat{mse}(R_i)$. Cette forte variabilité provient essentiellement des deux exercices de survénance les plus récentes, pour lesquels nous disposons de peu d'informations.

Il est utile de visualiser cette évolution, à travers le graphique suivant :

Graphique N°1: **Evolution de l'erreur standard par année de survénance**



Source : *Elaboré à partir du tableau n°3*

Nous observons que, l'erreur standard croît continuellement, l'augmentation du biais est presque insignifiante les premières années mais elle s'intensifie les dernières années, ce qui donne lieu à une évolution exponentielle de la courbe des erreurs.

Ceci est dû en grande partie, à l'amplification d'année en année du nombre de paiements à estimer pour constituer la provision : plus l'année est récente, plus le nombre d'estimation est important et cumule plus d'erreurs.

Notons, qu'obtenir une estimation du montant de provisions pour sinistre à payer, ne suffisait pas, et qu'il faut avoir un intervalle de confiance, au moins une mesure de dispersion du vrai montant autour de cette valeur prédite estimée.

Sous les hypothèses portant sur le choix d'une distribution (Normale ou Log Normale) conditionnelle pour R , Mack construit des intervalles de prédiction pour la provision²⁷ :

²⁷ Partrat C, 2007.

Si on suppose que la distribution est normale, de moyenne la valeur estimée \hat{R}_i et d'écart-type donné par l'erreur standard $se(\hat{R}_i)$, un intervalle de confiance à 95% de la loi Normale est donné par :

$$[\hat{R}_i - 2.se(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 2.se(\hat{R}_i)]$$

Cependant, il est possible de remettre en cause l'utilisation de la loi normale, étant donné la symétrie de sa distribution qui ne semble pas être vérifiée en pratique, et la possibilité d'obtenir une borne inférieure négative en dépit du fait que le montant de provisions ne peut être négatif²⁸.

Nous approximations alors la distribution de la provision \hat{R}_i par une distribution log normale de paramètres μ_i et σ_i^2 . Un intervalle de confiance à 95% de la loi Log-Normale à 95% est donné par :

$$[exp(\mu_i - 2\sigma_i), exp(\mu_i + 2\sigma_i)] \\ = [\hat{R}_i exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 2\sigma_i\right), \hat{R}_i exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 2\sigma_i\right)]$$

Avec : $\sigma_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{se(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right)$; $\mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}$

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Tableau N°5: Construction d'un intervalle de confiance pour la loi normal et la loi log-normal

	INC (Loi Normale)		INC (Log-Normale)	
	Borne inf	Borne sup	Borne inf	Borne sup
2005	-248,84	339,16	0,408359632	315,1831921
2006	43,856	432,164	20,14221386	1055,822278
2007	-299,1	1280,9	93,08383815	1571,44355
2008	-170,33	2093,67	278,4391036	2466,87461
2009	58,65	3798,65	692,3793203	4349,97304

Source : *Elaboré par nos soins*

L'intervalle de confiance à 95% avec la loi log normale, est relativement étroit. On peut dire donc que, plus l'intervalle de confiance est étroit, plus l'incertitude sur la valeur estimée (PSAP) est faible.

²⁸ Claire Guillaumin, 2008.

En effet, l'erreur standard relative au montant total de provisions est de 40 %, c'est-à-dire que, la variance de l'estimation $E(\hat{R}_i)$ ne représente que 40% du montant total des provisions estimées. Il ressort au final que, le modèle de Mack nous montre donc que les provisions calculées par la méthode « Chain Ladder » sont soumises à une très grande incertitude.

4.3 Les résultats de la technique Bootstrap

On se place dans le cadre du modèle Poisson sur-dispersé²⁹. Le montant de provisions est de **3779.69.10² DA** et la distribution des provisions est obtenue empiriquement à partir de 10000 simulations³⁰. Elle est présentée sous la forme d'un histogramme. On remarque que la densité empirique de la loi des provisions n'est pas symétrique³¹.

5. Analyse comparée des résultats

Plusieurs étapes sont nécessaires avant d'obtenir une estimation de la réserve totale de notre portefeuille et ainsi pouvoir la comparer entre les différents modèles présentés précédemment.

5.1 Comparaison des modèles en espérance

Le principal résultat des différents modèles est l'obtention de la moyenne des provisions prévues. Voici le tableau comparatif obtenu :

Tableau N° 6 : **Comparaison des modèles en espérance**

Modèles	Provisions sinistres à payer	Ecart relatif des provisions avec « Chain-Ladder »
« Chain Ladder »	3664,4	-
Mack	3664,4	0,0000%
Log Normale ³²	3748,199	2.286%
Poisson-sur dispersé	3664,4	0,0000%
Bootstrap	3805,4	3,84%

Source : *Elaboré par nos soins à partir des résultats obtenus*

²⁹Modèle fait parti des GLM, On peut se placé dans un autre cadre de modèle tel que la distribution Gamma.

³⁰On peut aller au delà de 10 000 simulations.

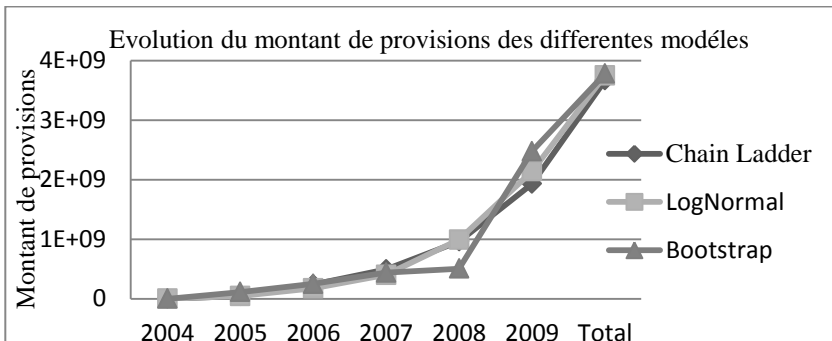
³¹ Il est indiqué en annexe 2

³² Pour plus de détail sur ce modèle : Voir Partrat C , 2007 .

On remarque que espérance, l'ensemble des modèles stochastiques est assez proche de la méthode déterministe « Chain Ladder », cela paraît évident, puisque les modèles sous jacents choisis reproduisent cette méthode.

Le graphique suivant illustre ce constat illustre ce constat :

Graphique N°2 : **Evolution des provisions des différentes méthodes par année de survenance**



Source : *Elaboré par nos soins*

D'après le graphique ci-dessus, l'ensemble des provisions des différents modèles progresse de la même façon pour toutes les années de survenance. Or les provisions Bootstrap, semblent légèrement excessives à partir des deux dernières années 2008 à 2009 comparativement aux autres années.

Une comparaison entre le montant de provision estimé par la compagnie **2323. 42 10⁴ DA** et le montant trouvé à travers nos méthodes, que, l'écart est très important. Il dépasse les **50% !!!**. L'explication de cet écart s'explique par la différence de méthode réglementaire « Blocage de prime »³³ utilisée par la compagnie (SAA). Cette dernière est basée sur le calcul du rapport de sinistres sur primes acquises.

Cette grande différence peut être jugée importante conditionnellement à la situation financière de la compagnie, car l'excédent de provision dégagé des méthodes actuarielles peut être injecté dans le

³³ Voir les méthodes réglementaires de provisionnement définies par le décret exécutif N° 95-342 du 30/10/1995 relatif aux engagements réglementés.

cycle de production, et pourra par la suite être couvert par les placements effectués par la compagnie.

5.2 Comparaison des erreurs de prédiction du montant de provisions entre différents modèles

Choisissons le « mean Square Error of prediction » comme critère de comparaison entre les différents modèles, le tableau suivant illustre cette comparaison :

Tableau N° 5: **Erreur de prédiction du montant de provisions des différents modèles**

	Blocage de prime	Chain Ladder	Mack	Poisson-sur dispersé	Bootstrap
Erreur de prédiction	-	-	2167831,955	1 351,35	474893 ,6193

Source : *Elaboré par nos soins*

Une première observation peut être tirée de ce tableau : Une absence totale d'erreur de prédiction du montant de provision dans « Chain Ladder » et « Blocage de prime ».

Le modèle de Mack et Bootstrap, dégagent des erreurs de prédiction relativement proches, en revanche, l'erreur de prédiction est inférieure dans le cadre du modèle Poisson-sur dispersé.

Clairement, nous déduisons que le modèle Poisson sur-dispersé est celui qui donne le montant de provision avec une incertitude moins élevée que celle des autres modèles.

Il est difficile de choisir analytiquement l'un des modèles, mais vu des résultats précédents concernant l'écart relatif sur le montant de provisions avec le modèle « Chain Ladder », le modèle Poisson sur-dispersé semble le mieux adapté à nos données.

C'est ce point, que réside la grande force des méthodes stochastiques et leurs capacités d'octroyer une existence des mesures de précision des estimations sur les provisions constituées³⁴.

³⁴Lheureux Elise, B&W Deloitte, 2006.

En définitive, serait l'utilisation des modèles stochastiques peut être une alternative intéressante aux méthodes déterministes et même –réglementaires- pratiquées au sein de la compagnie SAA.

6. Conclusion

Les provisions de la « RC Matérielle » ont présenté une volatilité importante d'une année sur l'autre. Les écarts types issus des différents modèles stochastiques ont permis de fournir un premier indicateur de prudence maximum à constituer dans les provisions pour faire face aux fluctuations ultérieures de la sinistralité.

Pour tout ce qui précède, nous concluons que : si la compagnie a recours à des méthodes déterministes, il en ressort que ces méthodes sont moins adaptées dans le cas de portefeuille de sinistres ayant une forte volatilité des fréquences et des montants, et avec des cadences de règlements s'étalant sur longues durées. A cet effet l'implémentation de nouvelles méthodes telles que les méthodes stochastiques à travers différents modèles peut déterminer le degré d'incertitude de l'estimation de ces provisions, qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie.

Les compagnies d'assurance doivent fournir des informations intelligibles et détaillés sur les provisions pour sinistres à payer et ce au niveau de bilan, de l'état de résultat ainsi qu'au niveau des notes aux états financiers.

Il est tout d'abord important de souligner l'intérêt pour les « compagnies d'assurance algériennes » de ne pas rester à l'écart des réformes engagées au niveau mondial notamment le projet ambitieux mis en place au sein de l'Union Européenne (Solvabilité II). De même, l'activité assurancielles dans ses différents compartiments au niveau de la SAA doit être en conformité avec les normes internationales et cela dans la perspective d'introduire ces nouvelles méthodes stochastiques dans l'évaluation des engagements, car cela permet de mieux identifier le niveau de contingence des passifs et de pouvoir établir des stratégies d'affaires en conséquence. Etant donné que ces dernières méthodes tiennent compte de l'erreur statistique et d'estimation, elles permettent aussi d'incorporer un jugement extérieur, et finalement, offrent la possibilité de tester la validité des paramètres utilisés.

Dans la continuité de ce travail, il n'est pas sans intérêt de rappeler qu'il s'est délibérément focalisé sur une seule branche d'assurance, plus précisément sur une seule garantie ; aussi, est-il utile de montrer que cette étude bien qu'opportune globalement, ne permet pas à elle seule de déterminer les provisions pour une société d'assurance composée de plusieurs branches. C'est pourquoi il semble nécessaire de regrouper les risques voisins tels que « RC Dommages Matériels » et « RC Dommages corporels » , et d'étudier l'impact de la prise en compte de dépendance entre les paiements des sinistres des deux garanties sur l'estimation des provisions techniques et leurs variabilités.

Références bibliographiques

Couilbault F, & Constant E & Latrasse M, (2003). « Les grands principes de l'assurance ». Ed. L'argus paris.

Davidov D, (2009). « Modélisation d la variance dans l'analyse stochastique du passif des polices ». Université du Québec, Montréal.

Denuit, M & Charpentier A, (2005). « Mathématiques de l'assurance non vie ». Tome2 : tarification et provisionnement. Edition Economica, Paris.

Denuit M & Charpentier A, (2004). « Mathématiques de l'assurance non-vie Tome I Principes fondamentaux de théorie du risque Économie et statistiques avancées ». Edition Economica. Paris.

Efron B & Amer.J,(1994). «Missing Data, Imputation and the Bootstrap ». *Statis. Ass.*, n 89.

Efron B, (1979). «Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. Ann». *Statis* n°07.

El Malaki A, (2005). «Détermination d'une méthode stochastique adaptée à l'évaluation des provisions techniques d'une société d'assurance non-vie dans le référentiel solvabilité 2 ». Thèse doctorat.

England P& Verrall.R, (2002) . «Stochastic Claims Reserving in General Insurance ». Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

England P& Verrall.R, (1999). « Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving». *Insurance Mathematics and Economies*.

Gillet A & Serra B, (2010). « Effet de dépendance entre différentes branches sur le calcul des provisions techniques » . Astin : contrôle des risques . Paris.

Guillaumin C, (2008). « Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses » Université Paris dauphine .Mémoire d'Actuariat.

Guy S, (1998). « Comptabilité des entreprises d'assurances » ,5^{ème} Edition, L'argus de l'assurance, Paris.

Jacob N, (1980). « Les assurances » .2^{ème} Edition Dalloz, Paris.

Krauth G, (2007). « Provisionnement et corrélation entre branches » . Diplôme actuariat C.N.M.A, Paris.

Lacoume A, (2009). « Risque de réserve sous Solvabilité II Horizon un an » . Towers Perrin.

Lacoume A, (2008). « Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an » . Mémoire d'actuaire, ISFA, université Claude Bernard Lyon 1, ISFA .

Lheureux E & Deloitte B&W,(2006). « Une méthode alternative de provisionnement stochastique en Assurance Non Vie : Les Modèles Additifs Généralisés » . Paris

Ludwig F & Tutz G, (2001). « Multivariate statistical modeling based on generalized linear models». 2^{ème} Edition Springer, Germany.

Mack T, (1999). « The standard error of chain ladder reserve estimates: recursive calculation and inclusion of a tail factor ». ASTIN Bulletin 29, 361-366.

Mack T, (1994). «Which stochastic model is underlying the chain ladder method? » Insurance: Mathematics and Economics 15, 133-138.

Mack T, (1993). «Measuring the variability of chain ladder reserve estimates». Meeting of the Casualty Actuarial Society, 101-182.

Mack T, (1993). « Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve Estimate» .

Mountassir K, (2000). « Les provisions techniques des compagnies d'assurance : réflexion sur approche d'audit sectorielle » . Royaume du Maroc.

Partrat C, Nessi J, Lecoœur E, Nisipasou E & Reiz O (2007). «Provisionnement technique en Assurance non-vie Perspectives actuarielles modernes ». Edition Economica, Paris

Partrat C, (2005). «Provisionnement stochastique : Méthodes factorielles », Journée de formation « Bootstrap et application actuarielles ».

Partrat C & Besson J, (2005). « Assurance non vie, Modélisation, simulation » Edition Economica, Paris.

Partrat C & Jal P, (2002). "Evaluation de la provision pour sinistres, Mesures d'incertitude, Bootstrap". Support de cours ISFA.

Pinteaux P, (2007). « Les nouvelles dispositions françaises concernant les provisions ». Economie et Management n°122.

Planchet F, Thérond P & Jacquemin J, (2005). « Modèles Financiers en Assurance. Analyses de risque dynamiques ». Edition Economica, Paris.

Racicot F & Raymond T, (2006). « Finance computationnelle et gestion des risques. Ingénierie financière avec applications Excel(VBA) et Matlab », Edition Delta, Québec Canada.

Régis B, (2005). «Econométrie ; manuel et exercices corrigés ».6^{ème} édition Dunod. Paris.

Tosseti A, Behar T, Fromenteau M & Ménart S (2010). « Comptabilité - Réglementation – Actuariat » – Economica.

Winter J & Planchet F, (2006). « Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective : Détermination et pilotage » Edition Economica, Paris.

ANNEXES

Annexe 1 : Rectangle des paiements en 10² DA

	1	2	3	4	5	6
2004	892.306	1 239.858	1928.023	2 394.575	2 689.648	2 734.615
2005	606.002	1 523.543	2 234.503	2 650.276	2 701.486	2 746 .65
2006	1 023.326	2 021.752	2 653.889	2 751.356	2 940.21	2 989. 37
2007	877.069	1 835.976	2 022.821	2 313.58	2 472. 39	2 513.72
2008	953.403	1 459.323	1 948. 20	2 228 .24	2 381 .19	2 420 00
2009	927.146	1 721, 41	2 298. 09	2 628.42	2 808 .83	2 855. 79

Annexe 2: triangle des paiements cumulés en 10² DA

	1	2	3	4	5	6
2004	892. 306	1239.858	1928.023	2 394.575	2689.648	2734.615
2005	606 .002	1523.543	2 234.503	2 650.276	2701.486	
2006	1023.326	2021.752	2 653.889	2751.356		
2007	877.069	1835.976	2022.821			
2008	953.403	1459.323				
2009	927.146					

Annexe 3 : Détermination de la distribution empirique des provisions par le Bootstrap

- Programmation sous R du « Calcul de la provision Bootstrap » :

```
B<- BootChainLadder (find, R=10000, process.distr="od.pois")
```

B

```
BootChainLadder (Triangle = find, R = 10000, process.distr = "od.pois")
```

Plot (B)

